YANIT ANAHTARI

1. Önce limitin varlığına bakalım:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3e^{y}x^{2}}{x^{2}+y^{2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3x^{2}}{x^{2}}=3$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3e^{y}x^{2}}{x^{2}+y^{2}}\right)=\lim_{y\to 0}0=0$$

bulunur. Bu takdirde f fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında limiti yoktur. O halde f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli değildir.

2. Kısmı türev tanımından

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}$$

yazılır. Bu limit için $f_x(0,0)$ ve $f_x(0,k)$ kısmi türevleri hesaplanmalıdır. Bu kısmi türevler

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_x(0,k)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,k)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hk\tan\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{h+k}{h-k}\right)\right)-0}{h}=-k$$

bulunur. Buradan

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k}=-1$$

elde edilir. Yine

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}$$

biçimindedir. Limitde yer alan $f_y(0,0)$ ve $f_y(h,0)$ kısmi türevleri sırasıyla

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

$$f_y(h,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)-f(h,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{hk\tan\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{h+k}{h-k}\right)\right)-0}{k}=h$$

olup

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\frac{h-0}{h}=1$$

elde edilir.

3. Öncelikle

$$\overset{o}{S}=U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2<2\right\}$$

olsun. Burada

$$D_1 f(x,y)=4-2x\,,\ D_2 f(x,y)=4-2y$$

biçimindedir.

$$grad\ f(x,y)=(4-2x,4-2y)=(0,0)$$

eşitliğini sağlayan $(x_0,y_0)=(2,2)$ noktası için $2^2+2^2>2$ olduğundan $(2,2)\notin U$ olur. Şimdi $x^2+y^2=2$ kısıtlaması için f nin ekstremumlarını bulalım. $g(x,y)=x^2+y^2-2$ olsun. Lagrange çarpanı yöntemini kullanarak

$$grad\ f(x,y)=\lambda grad\ g(x,y)\Rightarrow(4-2x,4-2y)=\lambda(2x,2y)$$

olup

$$(4-2x)y=2xy\lambda=(4-2y)x\ \Rightarrow\ 4y=4x\ \Rightarrow\ x=y$$

elde edilir. Eğer $x=y$ eşitliği $x^2+y^2=2$ kısıtlamasında yerine yazılırsa

$$2x^2=2\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm1\ \Rightarrow\ y_{1,2}=\pm1$$

olur. Buradan $P_1=(x_1,x_1)=(1,1)$ ve $P_2=(x_2,x_2)=(-1,-1)$ noktaları bulunur. Bu noktlardaki değerler

$$f(P_1)=f(1,1)=6 \text{ ve } f(P_1)=f(1,1)=-10$$

olur. O halde f nin S bölgesindeki maksimun noktası $P_1=(1,1)$, maksimum değeri 6 ve f nin S bölgesindeki minimum noktası $P_2=(-1,-1)$, minimum değeri -10 dır.

4. Öncelikle

$$f_1(x,y,z)=\frac{yz}{x},\ f_2(x,y,z)=\frac{xz}{y} \text{ ve } f_3(x,y,z)=\frac{xy}{z}$$

alalım. $F(x,y,z)=\left(\frac{yz}{x},\frac{xz}{y},\frac{xy}{z}\right)$ fonksiyonunun $J_F(x,y,z)$ türev matrisi

$$DF(x,y,z)=J_F(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-yz}{x^2} & \frac{z}{x} & \frac{y}{x} \\ \frac{z}{y} & \frac{-zx}{y^2} & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{z} & \frac{x}{z} & \frac{-xy}{z^2} \end{pmatrix}$$

olup, türev determinantı

$$\Delta_F(x,y,z)=\begin{vmatrix} \frac{-yz}{x^2} & \frac{z}{x} & \frac{y}{x} \\ \frac{z}{y} & \frac{-zx}{y^2} & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{z} & \frac{x}{z} & \frac{-xy}{z^2} \end{vmatrix}=\frac{-yz}{x^2}\left(\left(\frac{-zx}{y^2}\right)\left(\frac{-xy}{z^2}\right)-\frac{x}{z}\frac{x}{y}\right)-\frac{z}{x}\left(\frac{z}{y}\left(\frac{-xy}{z^2}\right)-\frac{y}{z}\frac{x}{y}\right)$$
$$+\frac{y}{x}\left(\frac{z}{y}\frac{x}{z}-\frac{y}{z}\left(\frac{-zx}{y^2}\right)\right)$$
$$=\frac{-yz}{x^2}\left(\frac{x^2}{yz}-\frac{x^2}{yz}\right)-\frac{z}{x}\left(-\frac{x}{z}-\frac{x}{z}\right)+\frac{y}{x}\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\right)=4$$

olarak bulunur. Böylece $\Delta_F(x,y,z)\neq 0$ olduğundan herhangi bir $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ noktası civarında F fonksiyonu terslenebilirdir.

5. $m=n$ için $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}$ biçiminde tanımlı $(a_n)\subset\mathbb{R}$ dizisini alalım. Bu takdirde $(a_n)\subset A$ olur. A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul A kümesinden alınan her yakınsak dizinin limitinin A kümesinde olmasıdır. Ancak

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$$

iken $0\notin A$ dır. Bu takdirde A kümesi kapalı değildir. O halde A kümesi kompakt değildir.

6. (a) Bölge çizilerek söz konusu integrali şöyle yazmak uygun olur:

$$\iint_D\left(x^2+y\right)dx\,dy=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\left(x^2+y\right)dydx+\int_1^2\int_x^{2\sqrt{x}}\left(x^2+y\right)dydx$$

$$=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)_{y=\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}}dx+\int_1^2\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)_{y=x}^{y=2\sqrt{x}}dx$$

$$=\int_0^1\left(x^{5/2}-\frac{3}{2}x\right)dx+\int_1^2\left(2x^{5/2}+2x-x^3-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=\left(\frac{2}{7}x^{7/2}-\frac{3}{4}x^2\right)_{x=0}^{x=1}+\left(\frac{4}{7}x^{7/2}+2x-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\right)_{x=1}^{x=2}$$

$$=-\frac{13}{28}+\left(\frac{32}{7}\sqrt{2}+4-4-\frac{4}{3}-\left(\frac{4}{7}+2-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right)$$

$$=-\frac{13}{28}+\frac{32}{7}\sqrt{2}-\frac{4}{3}-\frac{4}{7}-2+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=-\frac{5}{3}+\frac{32}{7}\sqrt{2}$$

(b) y değişkeni $y=0$ dan $y=1$ e değişirken, x değişkeni $x=-\sqrt{1-y^2}$ den $x=1-y$ ye değişiyor.

O halde merkezcil birim çemberin 2. Bölgedeki kısmı, $x=1-y$ doğrusu ve x-ekseninin sınırladığı bölgede integral alınmaktadır. Böylece verilen integral değişkenlerin sırası değiştirildiğinde

$$\int_{-1}^0\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dydx+\int_0^1\int_0^{1-x}f(x,y)\,dydx$$

biçiminde yazılır.

7.(a) $f(x,y)=x^2-xy$ fonksiyonu C^2-sınıfından olduğu için

$$D^2f\left((2,-3),(h,k)\right)=(x-2)^2f_{xx}(2,-3)+2(x-2)(y+3)f_{xy}(2,-3)+(y+3)^2f_{yy}(2,-3).$$

$$f_x=2x-y,\ f_{xx}=2,\ f_{xy}=-1,\ f_y=-x,\ f_{yy}=0$$

olduğuna göre

$$f_{xx}(2,-3)=2,\ f_{xy}(2,-3)=-1,\ f_{yy}(2,-3)=0$$

olur. Böylece

$$D^2 f\left((2,-3),(x-2,y+3)\right)=(x-2)^2\,2+2(x-2)(y+3)(-1)+(y+3)^2\,0$$
$$=2(x-2)^2-2(x-2)(y+3)=2(x-2)(x-2-y-3)=2(x-2)(x-y-5)$$

elde edilir.

(b) $f(x,y)=xe^{xy}$ fonksiyonu her mertebeden sürekli kımi diferansiyellenebilir olduğundan diferansiyellenebilirdir. Taylor teoremine göre

$$f(x,y)=f(1,1)+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k!}D^k f\left((1,1),(x-1,y-1)\right)+\frac{1}{3!}D^3\left((c_1,c_2),(x-1,y-1)\right)$$

olacak şekilde bir $c=(c_1,c_2)\in L\left((x,y);(1,1)\right)$ vardır.

$$f_x=e^{xy}+xye^{xy},\ f_{xx}=2ye^{xy}+xy^2e^{xy},$$
$$f_{xy}=2xe^{xy}+x^2ye^{xy},\ f_y=x^2e^{xy},\ f_{yy}=x^3e^{xy},$$
$$f_{xxx}=3y^2e^{xy}+xy^3e^{xy},\ f_{xxy}=2e^{xy}+4xye^{xy}+x^2y^2e^{xy},$$
$$f_{xyy}=3x^2e^{xy}+x^3ye^{xy},\ f_{yyy}=x^4e^{xy}$$

olduğuna göre

$$D^1 f\left((1,1),(x-1,y-1)\right)=(x-1)\,f_x(1,1)+(y-1)\,f_y(1,1)$$
$$=2e(x-1)+e(y-1),$$
$$D^2 f\left((1,1),(x-1,y-1)\right)=(x-1)^2\,f_{xx}(1,1)+2(x-1)(y-1)\,f_{xx}(1,1)+(y-1)^2\,f_{yy}(1,1)$$
$$=3e(x-1)^2+6e(x-1)(y-1)+e(y-1)^2$$

elde edilir.

8. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=\left(\cos(x+y)-2x+5y,2xy+3x,x^2+y^2\right)$ dönüşümünün diferansiyel lenebilir olduğunu gösteriniz ve $Df(x,y)$ türev matrisini bulunuz.

$$f_1(x,y)=\cos(x+y)-2x+5y$$
$$f_2(x,y)=2xy+3x$$
$$f_2(x,y)=x^2+y^2$$

olsun. Bu fonksiyonların kısmi türevleri

$$(f_1)_x(x,y) = -\sin(x+y) - 2$$
$$(f_1)_y(x,y) = -\sin(x+y) + 5$$
$$(f_2)_x(x,y) = 2y + 3$$
$$(f_2)_y(x,y) = 2x$$
$$(f_3)_x(x,y) = 2x$$
$$(f_3)_y(x,y) = 2y$$

olup, bu fonksiyonlar sürekli kısmi türevlere sahip ve

$$f(x,y) = \left(\cos(x+y) - 2x + 5y, 2xy + 3x, x^2 + y^2\right)$$

fonksiyonu diferansiyellenebilirdir. Ayrıca

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \\ (f_3)_x & (f_3)_y \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -\sin(x+y)-2 & -\sin(x+y)+52 \\ 2y+3 & 2x \\ 2x & 2y \end{bmatrix}_{3\times 2} .$$